Institut *Computational Mathematics* TU Braunschweig
Prof. Dr. B. Eick, Dr. M. Horn WS 2009/2010

Aufgaben zur Gruppentheorie · Blatt 9

Abgabe vor der Vorlesung am 20.1.

Aufgabe 40. (5 Punkte) Sei G eine endliche Gruppe.

a) Beweisen Sie Lemma 1.7.1c): Sei $H \leq G$ und sei $\nu : G \to \mathrm{Sym}(H\backslash G)$ die Permutationsdarstellung von G auf $H\backslash G$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}\,\nu = \cap_{g\in G} H^g$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass eine abelsche Gruppe genau eine treue transitive Permutationsdarstellung hat.

c) Gibt es noch andere Gruppen, die nur eine treue transitive Permutationsdarstellung haben?

Aufgabe 41. (6 Punkte) Betrachen Sie die folgenden zwei Permutationsgruppen:

$$M_{11} = \langle (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11), (3,7,11,8)(4,10,5,6) \rangle,$$
$$M_{12} = \langle (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11), (3,7,11,8)(4,10,5,6), (1,12)(2,11)(3,6)(4,8)(5,9)(7,10) \rangle.$$

a) Implementieren Sie den Algorithmus `StabilisatorKette` aus der Vorlesung in GAP.

b) Implementieren Sie den Algorithmus `KurzesErzeugendenSystem` und benutzen ihn, um den Algorithmus `StabilisatorKette` effektiv zu machen.

c) Bestimmen Sie die Ordnungen der beiden Gruppen M_{11} und M_{12}. Bestimmen Sie außerdem eine kurze Base und die zugehörige Stabilisatorkette sowie Transversalen dazu. Geben Sie dabei für jedes G_i eine kurzes Erzeugendensystem sowie die Größe von G_i an.

Aufgabe 42. (5 Punkte) Sei $G \leq S_n$ eine durch Erzeuger $g_1, \ldots, g_n$ definierte endliche Permutationsgruppe. Der *Transitivitätsgrad* von G ist die größte Zahl k, so dass G noch k-fach transitiv wirkt.

a) Entwickeln Sie einen Algorithmus, der den *Transitivitätsgrad* von G bestimmt.

b) Bestimmen Sie die Transitivitätsgrade der Gruppen M_{11} und M_{12} aus Aufgabe 41.

c) Wie kann man den Algorithmus erweitern, um festzustellen, ob G *scharf* k-fach transitiv ist?

Aufgabe 43. (4 Punkte) Jede endliche p-Gruppe ist nilpotent.