Aufgaben zur Gruppentheorie · Blatt 6

Abgabe vor der Vorlesung am 9.12.

Aufgabe 24. (2 Punkt) Seien $U, V \trianglelefteq G$. Zeigen Sie: $[U, V] \leq U \cap V$.

Aufgabe 25. (3 Punkte) Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus und $g \in G$. Zeigen Sie:

a) $(g^{-1})^{\phi} = (g^{\phi})^{-1}$. (Man schreibt daher auch einfach $g^{-\phi}$.)
b) $o(g^{\phi})$ teilt $o(g)$.
c) Wenn ϕ bijektiv ist, dann ist auch ϕ^{-1} ein Homomorphismus.

Finden Sie ein Beispiel, in dem $o(g^{\phi}) \neq o(g)$ gilt.

Aufgabe 26. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Smith-Normalformen der folgenden Matrizen:

a) $A := \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
b) $B := \begin{pmatrix} 10 & -16 & -4 \\ 6 & -24 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ -6 & 12 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 27. (5 Punkte) Sei $G = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^4 \rangle$ und $U = \langle a, a^b \rangle$. Bestimmen Sie die Operation von G auf den Nebenklassen von U.

Aufgabe 28. (6 Punkte) Seien G, H Gruppen, sei $\phi : G \to \mathrm{Aut}(H) : g \mapsto \psi_g$ ein Homomorphismus. Das *semidirekte Produkt* von G und H bezüglich ϕ ist $G \ltimes_{\phi} H := \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$. Zeigen Sie:

a) $G \ltimes_{\phi} H$ ist eine Gruppe bezüglich $(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1^{\psi_{g_2}} h_2)$.
b) Für die konstante Abbildung $\iota : G \to \mathrm{Aut}(H) : g \mapsto 1$ stimmt das semdirekte Produkt $G \ltimes_{\iota} H$ mit dem direkten Produkt $G \times H$ überein.
c) D_{2n} ist semidirektes Produkt von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
d) H (genauer: $1 \ltimes_{\phi} H \cong H$) ist Normalteiler von $G \ltimes_{\phi} H$.

Hinweis zu c): Aufgabe 18 benutzen.