Aufgaben zur Gruppentheorie · Blatt 5

Abgabe vor der Vorlesung am 2.12.

Aufgabe 18. (4 Punkte) Die Diedergruppe D_{2n} wurde in Aufgabe 7 definiert. Zeigen Sie, dass $D_{2n} \cong \langle a, b \mid a^2 = b^n = 1, b^a = b^{-1} \rangle$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt. Bestimmen Sie die abelschen Invarianten von D_{2n}.

Aufgabe 19. (2 Punkte) Berechnen Sie die abelschen Invarianten der Gruppe $G = \langle a, b \mid a^2, b^3, (ab)^4 \rangle$.

Aufgabe 20. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Gruppe $G = \langle x, y \mid x^y = x^2, y^x = y^2 \rangle$ die Ordnung 1 hat.

Aufgabe 21. (4 Punkte) Sei $G = \langle X \mid R \rangle$ endlich präsentiert mit $|X| > |R|$. Zeigen Sie, dass G unendlich ist. Was kann man im Fall $|X| = |R|$ sagen?

Aufgabe 22. (4 Punkte) Klassifizieren Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 10.

Hinweise: Verwenden Sie den Satz von Sylow. Zeigen Sie, dass es einen Normalteiler N der Ordnung 5 gibt. Zeigen Sie weiterhin: Wenn G nicht zyklisch ist, dann haben alle Elemente $a \in G \setminus N$ Ordnung 2.

Aufgabe 23. (4 Punkte) Für eine Gruppe G ist $\mathrm{Aut}(G) := \{f : G \to G \mid f \text{ Isomorphismus}\}$ die *Automorphismengruppe* von G und $\mathrm{Inn}(G) := \{f_g : G \to G : h \mapsto h^g \mid g \in G\}$ die *innere Automorphismengruppe* von G. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Inn}(G)$ ist Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$.
b) $\mathrm{Inn}(G)$ ist isomorph zu $G/Z(G)$.
c) $\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$.

Die Gruppe $\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ heißt *äußere Automorphismengruppe* von G. Die Elemente von $\mathrm{Aut}(G)$ heißen *Automorphismen*.