Aufgaben zur Gruppentheorie · Blatt 4

Abgabe vor der Vorlesung am 25.11.

Aufgabe 14. (4 Punkte) Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung $p^a m$, mit $p \nmid m$. Sei P eine p-Sylowuntergruppe von G. Zeigen Sie:

a) Sei $U \leq G$. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:
   1) U ist eine p-Gruppe.
   2) Für alle $u \in U$ ist $o(u)$ eine Potenz von p.
   3) Für alle $u \in U$ ist $u^{p^a} = 1$.

b) Wenn $U \leq G$ eine p-Gruppe ist, die P normalisiert, dann ist $U \leq P$.

Hinweis zu b): Zeigen Sie zunächst, dass UP eine p-Sylowuntergruppe ist, z. B. mit dem Homomorphiesatz.

Aufgabe 15. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Konjugiertenklassen von Elementen und Untergruppen in S_3. Bestimmen sie für jeweils einen Repräsentanten jeder Konjugiertenklasse den zugehörigen Stabilisator (also Zentralisatoren und Normalisatoren).

Aufgabe 16. (6 Punkte) Sei G eine endliche Gruppe.

a) Zeigen Sie, dass konjugierte Elemente von G auch konjugierte Zentralisatoren haben.

b) Seien $g_1, \ldots, g_r$ Repräsentanten jeder Konjugiertenklasse in G, und $c_1, \ldots, c_r$ die Ordnungen der Zentralisatoren dieser Elemente. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{c_1} + \cdots + \frac{1}{c_r} = 1$ gilt.

c) Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen mit höchstens drei Konjugiertenklassen.

Aufgabe 17. (6 Punkte) Zeigen Sie:

a) Sei F eine freie Gruppe und $\pi : F \to H$ ein Homomorphismus und $\varphi : G \to H$ ein Epimorphismus. Dann gibt es einen Homomorphismus $\alpha : F \to G$ mit $\alpha\varphi = \pi$.

b) Sei G eine Gruppe, $N \lhd G$ und G/N frei. Dann existiert zu N ein Komplement in G, d.h. es existiert $U \leq G$ mit $G = NU$ und $N \cap U = \{1\}$.

Hinweis zu b): Benutzen Sie a).