Aufgaben zur Gruppentheorie · Blatt 3

Abgabe vor der Vorlesung am 18.11.

Aufgabe 9. (4 Punkte) Sei $G = GL(2, \mathbb{R})$ und $V = \mathbb{R}^2$. G operiert durch Multiplikation von rechts auf V.

a) Bestimmen Sie die Bahnen von G auf V.
b) Bestimmen Sie den Stabilisator von $v = (1, 0)$.

Aufgabe 10. (3 Punkte) Sei G eine Gruppe und $U \leq G$ mit $[G : U] = 2$. Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 11. (4 Punkte) Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Die *Ordnung* $o(g)$ von g ist die kleinste natürliche Zahl n, so dass $g^n = 1_G$ gilt. Zeigen Sie:

a) Für alle $g \in G$ ist $|\langle g \rangle| = o(g)$.
b) Wenn G endlich ist, ist $o(g)$ Teiler von $|G|$ für alle $g \in G$.
c) Wenn p Primzahl und Teiler von $|G|$ ist, dann existiert $g \in G$ mit Ordnung p.

Aufgabe 12. (4 Punkte) Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung p. Zeigen Sie:

a) Die Menge $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Restklassen in $\mathbb{Z}$ modulo p bildet eine Gruppe bezüglich der Addition.
b) Alle $g \in G \setminus \{1_G\}$ haben die Ordnung p.
c) $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Ist für a) notwendig, dass p eine Primzahl ist?

Aufgabe 13. (5 Punkte) Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie:

a) Jede Gruppe der Ordnung 30 besitzt einen nichttrivialen Normalteiler.
b) Jede Gruppe der Ordnung p^2q besitzt einen nichttrivialen Normalteiler.