Aufgaben zur Gruppentheorie · Blatt 1

Abgabe vor der Vorlesung am 4.11.

Aufgabe 1. (6 Punkte) Zeigen Sie:

a) Eine Gruppe G mit der Eigenschaft $x^2 = 1$ für alle $x \in G$ ist abelsch.
b) $\mathrm{Sym}(X)$ ist genau dann abelsch, wenn $|X| \leq 2$ gilt.
c) $\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{Z})$ ist genau dann abelsch, wenn $n = 1$ gilt.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei p Primzahl und $\mathbb{Q}_p := \{\frac{a}{p^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\}$. Zeigen oder Widerlegen Sie:

a) $\mathbb{Q}_p$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition.
b) $\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation.
c) $\mathbb{Q}_p$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Hinweis: Nutzen Sie, dass $\mathbb{Q}_p$ Teilmenge (also möglicherweise Untergruppe) von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Sei $A_n = \{\pi \in S_n \mid sign(\pi) = 1\}$, wobei das Signum einer Permutation definiert ist durch $sign(\pi) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$. Zeigen Sie:

a) $sign(\pi) \in \{-1, +1\}$.
b) A_n ist Untergruppe und sogar Normalteiler von S_n.
c) Bestimmen Sie die Faktorgruppe S_n / A_n.

Was passiert, wenn in der Definition von A_n die 1 durch -1 ersetzt wird?

Hinweis zu b) + c): Zeigen Sie zunächst, dass $sign : S_n \to \{-1, +1\}$ ein Homomorphismus ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei $D_\infty = \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. Zeigen Sie:

a) $D_\infty = \{ \left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
b) D_∞ ist nicht zyklisch.