

Aufgaben zur Gruppentheorie · Blatt 10

Abgabe vor der Vorlesung am 27.1.

Aufgabe 44. (3 Punkte) Sei G eine Gruppe mit Normalteiler N , so dass G/N und N auflösbar sind. Zeigen Sie, dass dann auch G auflösbar ist.

Aufgabe 45. (6 Punkte) Sei G eine Gruppe der Ordnung $p^a q^b$, wobei p und q zwei Primzahlen sind und $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

- a) Wenn G eine normale p -Sylowgruppe hat, dann ist G auflösbar.
- b) Wenn $p > q^b$, dann ist G auflösbar.
- c) Wenn $p + 1 = q^b$, dann ist G auflösbar.

Hinweis zu c): Lösen Sie zunächst den Fall $a = 1$ mittels des Sylowsatzes und abzählen.

Für $a > 1$ betrachten Sie den Kern N und das Bild H der Permutationsdarstellung von G auf den p -Sylowgruppen. Überlegen Sie, welche Primzerlegungen $|H|$ und damit $|N|$ und $|G/N|$ haben können. Wenden Sie nun Induktion sowie a) und b) an.

Aufgabe 46. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass alle Gruppen mit weniger als 60 Elementen auflösbar sind.

Hinweis: Verwenden Sie die Aufgaben 13 und 43–45.

Aufgabe 47. (6 Punkte) Zeigen Sie, dass die Gruppe A_5 einfach ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich dazu die Anzahl der Elemente der Ordnung 3 und 5 in A_5 . Schränken Sie dann die möglichen Ordnungen eines Normalteilers ein. Verwenden Sie dazu wieder Permutationsdarstellungen auf p -Sylowgruppen.