Institut *Computational Mathematics*
Prof. Dr. B. Eick, Dr. M. Horn

TU Braunschweig
WS 2009/2010

Aufgabenzur Gruppentheorie · Blatt 8

Abgabe vor der Vorlesung am 6.1.

Aufgabe 34. (4 Punkte) Sei G eine endliche Gruppe, sei M ein minimaler Normalteiler von G. Zeigen Sie: Wenn M abelsch ist, gilt $M \cong C_p \times \cdots \times C_p = C_p^m$ wobei p Primzahl, $m \in N$ und $C_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist.

Solche Gruppen C_p^m heißen auch *elementar-abelsch*; sie entsprechen genau den additiven Gruppen der Vektorräume $\mathbb{F}_p^m$.

Aufgabe 35. (3 Punkte) Klassifizieren Sie alle einfachen abelschen Gruppen.

Aufgabe 36. (7 Punkte) Untersuchen Sie die Operation der Gruppe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) = \{\mathrm{M} \in \mathbb{F}_2^{3\times 3} \mid \det(\mathrm{M}) \neq 0\}$ auf den 1-dimensionalen Untervektorräumen von $\mathbb{F}_2^3$:

a) Bestimmen Sie die Bahnen und Stabilisatoren dieser Operation.
b) Berechnen Sie den Kern der zugehörigen Permutationsdarstellung.
c) Zeigen Sie, dass die Operation primitiv ist.
d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ einfach ist.

Hinweis zu d): Lemma 3.2.8

Aufgabe 37. (3 Punkte) Implementieren Sie die Funktion BlockSystem aus der Vorlesung in GAP und untersuchen Sie damit die Blockstruktur von $G = \langle(186)(275)(394), (123)(49)(57)(68)\rangle$. Geben Sie insbesondere alle Blöcke an.

Aufgabe 38. (3 Punkte) Sei $G = \langle x, y \mid x^p, y^p, (xy)^p\rangle$ für eine Primzahl p.

a) Bestimmen Sie G/G'.
b) Experimentieren Sie mit *GAP*, um herauszufinden, für welche p gilt, dass $|G| < \infty$.
c) Stellen Sie nach Ihren Experimenten aus (b) eine Vermutung über die Größe von G auf.

Aufgabe 39. (n Bonuspunkte) Beweisen Sie (c) aus Aufgabe 38.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!