

Aufgaben zur Gruppentheorie · Blatt 7

Abgabe vor der Vorlesung am 16.12.

Aufgabe 29. (5 Punkte) Eine Untergruppe H von G heißt *charakteristisch* wenn für alle $\varphi \in \text{Aut}(G)$ gilt $H = H^\varphi$. Insbesondere ist jede charakteristische Untergruppe ein Normalteiler.

- Zeigen Sie, dass G' und $Z(G)$ charakteristische Untergruppen sind.
- Bestimmen Sie alle charakteristischen Untergruppen von S_3 und von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Aufgabe 30. (4 Punkte) Die *Eulersche φ -Funktion* ordnet jeder natürlichen Zahl n die Anzahl der natürlichen Zahlen im Intervall $[1..n]$ zu, welche koprim zu n sind, d.h.

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto |\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n \text{ und } \text{ggT}(n, m) = 1\}|.$$

Zeigen Sie, dass $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\varphi(n)\mathbb{Z}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jeder Automorphismus von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bereits durch das Bild von $1 + n\mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt ist. Überlegen Sie, welche Möglichkeiten es hierfür gibt.

Aufgabe 31. (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Gruppen mit trivialer Automorphismengruppe.

Aufgabe 32. (2 Punkte) Sei $X = \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie: Falls G $(k + 1)$ -fach transitiv auf X operiert, so operiert G auch k -fach transitiv auf X .

Aufgabe 33. (5 Punkte) Sei $X = \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie:

- S_n ist scharf n -fach transitiv.
- A_n ist scharf $(n - 2)$ -fach transitiv, falls $n > 2$.
- Wenn $G \leq S_n$ und G ist $(n - 2)$ -fach transitiv, dann ist $G = A_n$ oder $G = S_n$.

Hinweis zu c): Welche Möglichkeiten für $|G|$ gibt es?