# Aufgaben zur Gruppentheorie · Blatt 2

Abgabe vor der Vorlesung am 11.11.

**Aufgabe 5.** (5 Punkte)
Seien $G, H$ Gruppen. Das *direkte Produkt* von $G$ und $H$ ist $G \times H := \{(g,h) \mid g \in G, h \in H\}$.

a) Zeigen Sie: $G \times H$ ist eine Gruppe bezüglich $(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$.

b) Zeigen Sie: $|G \times H| = |G| \cdot |H|$.

c) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi : G \times H \to G : (g, h) \mapsto g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

d) Bestimmen Sie den Kern von $\varphi$.

e) Beschreiben Sie alle (normalen) Untergruppen von $G \times H$ in Abhängigkeit von den (normalen) Untergruppen von $G$ und $H$.

**Aufgabe 6.** (5 Punkte) Sei $X$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie: $\langle X \rangle$ ist zyklisch.

b) Beschreiben Sie einen Algorithmus, welcher ein $x \in \mathbb{Q}$ findet, so dass $\langle X \rangle = \langle x \rangle$.

c) Ist $\mathbb{Q}$ endlich erzeugt?

**Aufgabe 7.** (6 Punkte) Sei $\mathbb{R}^2$ die Euklidische Ebene und sei $X$ ein reguläres Polygon mit $n$ Ecken in $\mathbb{R}^2$ ($n \geq 3$). Bestimmen Sie die Gruppe $S_{\mathbb{R}^2}(X)$ aller Symmetrien von $X$ in den folgenden Schritten:

a) Zeigen Sie, dass die Rotationen von $X$ um den Mittelpunkt von $X$ mit dem Winkel $2\pi i/n$ Symmetrien von $X$ sind für $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

b) Bestimmen Sie die Spiegelungen von $X$, die $X$ invariant lassen.

c) Folgern Sie, dass $S_{\mathbb{R}^2}(X)$ die Ordnung $2n$ hat.

d) Beschreiben Sie $S_{\mathbb{R}^2}(X)$ als Gruppe von Permutationen der Ecken von $X$.

Die Gruppe $S_{\mathbb{R}^2}(X)$ wird auch *Diedergruppe* der Ordnung $2n$ genannt und mit $D_{2n}$ bezeichnet.

**Aufgabe 8.** (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Untergruppen der alternierenden Gruppe $A_4 = \langle (1,2,3), (1,2,4) \rangle$. Zeichnen Sie die Untergruppen als Verband. Gibt es zu jedem Teiler von $|A_4|$ eine Untergruppe dieser Ordnung?